

Podstawowa wiedza niezbędna do rozwiązania równania o zmiennych rozdzielonych

Jednym z fundamentalnych typów równań różniczkowych jest równanie o zmiennych rozdzielonych. Proces rozwiązania tego typu równania polega na separacji wyrazów zawierających y i x , przeniesieniu ich na różne strony równania, a następnie zastosowaniu operacji całkowania. Po przeprowadzeniu całkowania nie można zapomnieć o dodaniu do jednej ze stron stałej całkowania. Poniżej znajduje się przykład zadania ilustrującego proces rozwiązania tego rodzaju równania.:

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y' \sin(x) - y \cos(x) = 0 \quad (1)$$

Gdzie:

$$y(x) \quad (2)$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Rodzielanie zmiennych

Jeżeli jest to możliwe, dokonujemy powszechnie znanego rozdzielania zmiennych x i y . Poprzez rozdzielanie zmiennych rozumie się oddzielenie wyrazów zawierających zmienną x od tych, które zawierają zmienną y . W celu dokonania tego podziału, możemy przyporządkować te wyrazy do funkcji $h(x)$ i $g(y)$, co pokazano poniżej:

$$g(y) = \frac{1}{\tan(x)} \quad (3)$$

$$h(x) = y \quad (4)$$

Poza tymi elementami nasze równanie zawiera również wyraz y' , który można również zapisać jako:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad (5)$$

Po wstawieniu tego wyrażenia można zauważyć, że w późniejszych krokach pomnożenie równania obustronnie przez dx umożliwia całkowanie obu stron względem innych zmiennych.

Całkowanie zmiennych rozdzielonych

Poniższe równanie należy zmodyfikować:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\tan(x)} \quad (6)$$

W tym celu mnożymy obustronnie przez dx oraz przenosimy $y(x)$ na przeciwną stronę równania:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{\tan(x)} dx \quad (7)$$

Następnie, aby "wrócić" do funkcji pierwotnej oraz otrzymać wynik w postaci funkcji y całkujemy otrzymane równanie obustronnie: Co ważne, przy całkowaniu należy pamiętać o dodaniu stałej całkowania w dowolnej postaci naogół zapisywanej jako C bądź D .

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{\tan(x)} dx \quad (8)$$

Po całkowaniu otrzymujemy następujący wynik:

$$\log(y) = \log(\sin(x)) + D \quad (9)$$

Uproszczenie rozwiązania otrzymanego po scałkowaniu równań

Po uporządkowaniu oraz przeobrażeniu stałej wyrażenie ma następującą postać:

$$y(x) = C_1 \sin(x) \tag{10}$$

Otrzymane wyrażenie stanowi rozwiązanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych. Stała całkowania jest możliwa do policzenia w momencie w którym w zadaniu zostały podane warunki początkowe, czyli wartość funkcji dla konkretnego x .