Podstawowa wiedza niezbędna do rozwiązania równania różniczkowego

Jednym z najbardziej podstawowych typów równań różniczkowych jest równanie liniowe o stałych współczynnikach. Równanie liniowe składa się jedynie z liniowych wyrazów, które mogą zawierać stałe współczynniki. Wymagane jest przejście na rówanie jednorodne- przenosimy wszystkie wyrazy z funkcją y i jej pochodnymi, po czym przyrównujemy do zera otrzymując równanie jednorodne. Następnie wymagane jest uzmiennienie stałej i traktowanie jej jako funkcji zależnej od x. Liczymy pochodne obu stron i wykorzystujemy wyniki w początkowym równaniu. Wynikiem jest suma rozwiązań z obu części

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y' - e^{2x} - ye^{x} = 0 \tag{1}$$

Gdzie:

$$y(x) \tag{2}$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Przejscie na równanie jednorodne

Przenosimy wszystkie elementy z funkcją y i jej pochodnymi na jedną stronę i przyrównujemy do zera, otrzymując równanie jednorodne.

Rozwiązanie powstałego równania o zmiennych rozdzielonych

Uzyskane równanie jednorodne jest równaniem o zmiennych rozdzielonych i przyjmuje postać:

$$y(x)e^{x} + \frac{d}{dx}y(x) = 0 \tag{3}$$

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y' - ye^{x} = 0 \tag{4}$$

Gdzie:

$$y(x) \tag{5}$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Rodzielanie zmiennych

Jeżeli jest to możliwe, dokonujemy powszechnie znanego rozdzielenia zmiennych x i y. Poprzez rozdzielenie zmiennych rozumie się oddzielenie wyrazów zawierających zmienną x od tych, które zawierają zmienną y. W celu dokonania tego podziału, możemy przyporządkować te wyrazy do funkcji $h(x)$ i $g(x)$, co pokazano poniżej:

$$g(x) = e^{x} \tag{6}$$

$$h(x) = y \tag{7}$$

Poza tymi elementami nasze równanie zawiera również wyraz y', który można również zapisać jako:

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{8}$$

Po wstawieniu tego wyrażenia można zauważyć, że w pózniejszych krokach pomnożenie równania obustronnie przez dx umożliwia scałkowanie obu stron względem innych zmiennych.

Całkowanie zmiennych rozdzielonych

Poniższe równanie należy zmodyfikować:

$$\frac{dy}{dx} = ye^{x} \tag{9}$$

W tym celu mnożymy obustronnie przez dx oraz przenosimy $y(x)$ na przeciwną stronę równania:

$$\frac{dy}{y} = e^{x}dx \tag{10}$$

Następnie, aby "wrócić" do funkcji pierwotnej oraz otrzymać wynik w postaci funkcji y całkujemy otrzymane równanie obustronnie: Co ważne, przy całkowaniu należy pamiętać o dodaniu stałej całkowania w dowolnej postaci naogół zapisywanej jako C bądź D.

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int e^{x}\, dx \tag{11}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy następujący wynik:

$$\log{(y)} = e^{x} + D \tag{12}$$

Uproszczenie rozwiązania otrzymanego po scałkowaniu równań

Po uporządkowaniu oraz przeobrażeniu stałej wyrażenie ma następującą postać:

$$y(x) = C_{1} e^{e^{x}} \tag{13}$$

Otrzymane wyrażenie stanowi rozwiązania równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych. Stała całkowania jest możliwa do policzenia w momencie w którym w zadaniu zostały podane warunki początkowe, czyli wartość funkcji dla konkretnego x.

Uzmiennienie stałej

Kolejnym krokiem jest potraktowanie stałej jako funkcji zależnej od x:

$$y = -1 - e^{x} + \mathrm{C}_{1}\left(x\right) e^{e^{x}} \tag{14}$$

Następnie należy policzyć pochodne obu stron równaniaOtrzymując równanie następującej postaci

$$y' = - e^{x} + \mathrm{C'}\left(x\right) e^{e^{x}} + \mathrm{C}_{1}\left(x\right) e^{x} e^{e^{x}} \tag{15}$$

Dzięki tej operacji możemy teraz podstawić y i y' do oryginalnego równania

$$e^{2x} - y(x)e^{x} + \frac{d}{dx}y(x) = 0 \tag{16}$$

I otrzymamy:

$$e^{x} - e^{2x} + \mathrm{C'}\left(x\right) e^{e^{x}} - \left(\mathrm{C}_{1}\left(x\right) e^{e^{x}} - e^{x} - 1\right) e^{x} + \mathrm{C}_{1}\left(x\right) e^{x} e^{e^{x}} = 0 \tag{17}$$

Następnie, jeżeli wszystko zostało policzne poprawnie to wartosci $C(x)$ powinny się skrócić i uprościć do postaci z której w łatwy sposób możemy wyznaczyć $C'(x)$ otrzymując:

$$\mathrm{C'}\left(x\right) = 0 \tag{18}$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymamy wartość stałej:

$$\mathrm{C}_{1}\left(x\right) = 0 \tag{19}$$

Aby otrzymać ostateczny wynik musimy podstawić otrzymaną stałą do pierwszego równania w którym uzmiennilismy stałą:

$$y = -1 - e^{x} \tag{20}$$