

Podstawowa wiedza niezbędna do rozwiązania równania różniczkowego

Równanie różniczkowe typu Bernoulliego to szczególny rodzaj równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu. Ma postać ogólną:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (1)$$

Gdzie y to nieznaną funkcją zależną od zmiennej x , $P(x)$ i $Q(x)$ o dane funkcje zależne od x , a n to stała liczba rzeczywista, różna od 0 i 1. Charakterystyczne dla równań Bernoulliego jest to, że są one nieliniowe z powodu obecności wyrazu y^n po jednej stronie równania. Rozwiązania tego typu równań mogą być trudne do uzyskania w ogólności, ale dla pewnych wartości n można zastosować pewne techniki upraszczające rozwiązanie. W przypadku $n = 0$ równanie Bernoulliego staje się liniowe, a dla $n = 1$ można je przekształcić do postaci liniowego równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu. W innych przypadkach konieczne może być zastosowanie specjalnych technik, takich jak zamiana zmiennych czy redukcja rzędu, aby uzyskać ogólne rozwiązanie.

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y' - y - 3y^2 \sin(x) = 0 \quad (2)$$

Gdzie:

$$y(x) \quad (3)$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Wyznaczenie nowej funkcji z zależnej od x w celu przejścia na równanie liniowe

Aby dokonać podstawienia, konieczne jest zdefiniowanie n poprzez znalezienie najwyższej potęgi y , gdzie n to wykładnik tej funkcji.

$$n = 2 \quad (4)$$

Następnie należy dokonać podstawienia i przejść na nową funkcję z , używając poniższego wzoru:

$$z = y^{1-n} \quad (5)$$

W naszym przypadku:

$$z = \frac{1}{y} \quad (6)$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie pierwszej pochodnej funkcji z :

$$z' = \frac{(1-n)y^{1-n}(x) \frac{d}{dx}y(x)}{y(x)} \quad (7)$$

Po podstawieniu wartości n :

$$z' = -\frac{\frac{d}{dx}y(x)}{y^2(x)} \quad (8)$$

Następnie należy wyznaczyć z z powyższych równań y oraz y'

$$y = \frac{1}{z(x)} \quad (9)$$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}z(x)}{z^2(x)} \quad (10)$$

Przejsie na równanie liniowe

Ostatnim krokiem do przejścia na równanie liniowe jest podstawienie wyliczonych wyżej y i y' do pierwotnego równania:

$$z(x) - 3 \sin(x) + \frac{d}{dx}z(x) = 0 \quad (11)$$

Orzymane równanie liczymy w następujący sposób:

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$z' - z - 3 \sin(x) = 0 \quad (12)$$

Gdzie:

$$z(x) \quad (13)$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Przejsie na równanie jednorodne

Przenosimy wszystkie elementy z funkcją y i jej pochodnymi na jedną stronę i przyrównujemy do zera, otrzymując równanie jednorodne.

Rozwiązanie powstałego równania o zmiennych rozdzielonych

Uzyskane równanie jednorodne jest równaniem o zmiennych rozdzielonych i przyjmuje postać:

$$z(x) + \frac{d}{dx}z(x) = 0 \quad (14)$$

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$z' - z = 0 \quad (15)$$

Gdzie:

$$z(x) \quad (16)$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Rodzielanie zmiennych

Jeżeli jest to możliwe, dokonujemy powszechnie znanego rozdzielenia zmiennych x i y . Poprzez rozdzielenie zmiennych rozumie się oddzielenie wyrazów zawierających zmienną x od tych, które zawierają zmienną y . W celu dokonania tego podziału, możemy przyporządkować te wyrazy do funkcji $h(x)$ i $g(x)$, co pokazano poniżej:

$$g(x) = 1 \quad (17)$$

$$h(x) = z \quad (18)$$

Poza tymi elementami nasze równanie zawiera również wyraz z' , który można również zapisać jako:

$$z' = \frac{dz}{dx} \quad (19)$$

Po wstawieniu tego wyrażenia można zauważyć, że w późniejszych krokach pomnożenie równania obustronnie przez dx umożliwia scałkowanie obu stron względem innych zmiennych.

Całkowanie zmiennych rozdzielonych

Poniższe równanie należy zmodyfikować:

$$\frac{dz}{dx} = z \quad (20)$$

W tym celu mnożymy obustronnie przez dx oraz przenosimy $z(x)$ na przeciwną stronę równania:

$$\frac{dz}{z} = 1 dx \quad (21)$$

Następnie, aby "wrócić" do funkcji pierwotnej oraz otrzymać wynik w postaci funkcji y całkujemy otrzymane równanie obustronnie: Co ważne, przy całkowaniu należy pamiętać o dodaniu stałej całkowania w dowolnej postaci naogół zapisywanej jako C bądź D .

$$\int \frac{1}{z} dy = \int 1 dx \quad (22)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy następujący wynik:

$$\frac{y}{z} = x + D \quad (23)$$

Uproszczenie rozwiązania otrzymanego po scałkowaniu równań

Po uporządkowaniu oraz przeobrażeniu stałej wyrażenie ma następującą postać:

$$z(x) = C_1 e^x \quad (24)$$

Otrzymane wyrażenie stanowi rozwiązanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych. Stała całkowania jest możliwa do policzenia w momencie w którym w zadaniu zostały podane warunki początkowe, czyli wartość funkcji dla konkretnego x .

Uzmiennienie stałej

Kolejnym krokiem jest potraktowanie stałej jako funkcji zależnej od x :

$$y = -\frac{3 \cos(x)}{2} - \frac{3 \sin(x)}{2} + C_1(x)e^x \quad (25)$$

Następnie należy policzyć pochodne obu stron równania Otrzymując równanie następującej postaci

$$y' = -\frac{3 \cos(x)}{2} + \frac{3 \sin(x)}{2} + C'(x)e^x + C_1(x)e^x \quad (26)$$

Dzięki tej operacji możemy teraz podstawić y i y' do oryginalnego równania

$$z(x) - 3 \sin(x) + \frac{d}{dx} z(x) = 0 \quad (27)$$

I otrzymamy:

$$C'(x)e^x = 0 \quad (28)$$

Następnie, jeżeli wszystko zostało policzone poprawnie to wartości $C(x)$ powinny się skrócić i uprościć do postaci z której w łatwy sposób możemy wyznaczyć $C'(x)$ otrzymując:

$$C'(x) = 0 \quad (29)$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymamy wartość stałej:

$$C_1(x) = 0 \quad (30)$$

Aby otrzymać ostateczny wynik musimy podstawić otrzymaną stałą do pierwszego równania w którym uzmienniliśmy stałą:

$$y = -\frac{3 \cos(x)}{2} - \frac{3 \sin(x)}{2} \quad (31)$$