## Podstawowa wiedza niezbędna do rozwiązania równania rózniczkowego

Równanie różniczkowe typu Bernoulliego to szczególny rodzaj równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu. Ma postać ogólną:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{1}$$

Gdzie $y$ to nieznana funkcja zależna od zmiennej $x$, $P(x)$ i $Q(x)$ o dane funkcje zależne od $x$, a $n$ to stała liczba rzeczywista, różna od 0 i 1. Charakterystyczne dla równań Bernoulliego jest to, że są one nieliniowe z powodu obecności wyrazu $y^n$ po jednej stronie równania. Rozwiązania tego typu równań mogą być trudne do uzyskania w ogólności, ale dla pewnych wartości $n$ można zastosować pewne techniki upraszczające rozwiązanie. W przypadku $n = 0$ równanie Bernoulliego staje się liniowe, a dla $n = 1$ można je przekształcić do postaci liniowego równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu. W innych przypadkach konieczne może być zastosowanie specjalnych technik, takich jak zamiana zmiennych czy redukcja rzędu, aby uzyskać ogólne rozwiązanie.

## Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y + xy' + xy^2 = 0 \tag{2}$$

Gdzie:

$$y(x) \tag{3}$$

Jest naszą szukaną funkcją.

## Wyznaczenie nowej funkcji z zależnej od x w celu przejscia na równanie liniowe

Aby dokonać podstawienia, konieczne jest zdefiniowanie $n$ poprzez znalezienie najwyższej potęgi $y$, gdzie $n$ to wykładnik tej funkcji.

$$n = 2 \tag{4}$$

Następnie należy dokonać podstawienia i przejść na nową funkcję $z$, używając poniższego wzoru:

$$z = y^{1-n} \tag{5}$$

W naszym przypadku:

$$z = \frac{1}{y} \tag{6}$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie pierwszej pochodnej funkcji $z$:

$$z' = \frac{(1-n)\, y^{1-n}(x) \frac{d}{dx} y(x)}{y(x)} \tag{7}$$

Po podstawieniu wartosci n :

$$z' = -\frac{\frac{d}{dx} y(x)}{y^2(x)} \tag{8}$$

Następnie należy wyznaczyć z powyższych równań $y$ oraz $y'$

$$y = \frac{1}{z(x)} \tag{9}$$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx} z(x)}{z^2(x)} \tag{10}$$

## Przejscie na równanie liniowe

Ostatnim krokiem do przejscia na równanie liniowe jest podstawienie wyliczonych wyżej $y$ i $y'$ do pierwotnego równania:

$$x - z(x) + x\frac{d}{dx}z(x) = 0 \tag{11}$$

Orzymane równanie liczymy w następujący sposób:

## Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$x - z + xz' = 0 \tag{12}$$

Gdzie:

$$z(x) \tag{13}$$

Jest naszą szukaną funkcją.

## Przejscie na równanie jednorodne

Przenosimy wszystkie elementy z funkcją $y$ i jej pochodnymi na jedną stronę i przyrównujemy do zera, otrzymując równanie jednorodne.

## Rozwiązanie powstałego równania o zmiennych rozdzielonych

Uzyskane równanie jednorodne jest równaniem o zmiennych rozdzielonych i przyjmuje postać:

$$z(x) + x\frac{d}{dx}z(x) = 0 \tag{14}$$

## Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$z + xz' = 0 \tag{15}$$

Gdzie:

$$z(x) \tag{16}$$

Jest naszą szukaną funkcją.

## Rodzielanie zmiennych

Jeżeli jest to możliwe, dokonujemy powszechnie znanego rozdzielenia zmiennych $x$ i $y$. Poprzez rozdzielenie zmiennych rozumie się oddzielenie wyrazów zawierających zmienną $x$ od tych, które zawierają zmienną $y$. W celu dokonania tego podziału, możemy przyporządkować te wyrazy do funkcji $h(x)$ i $g(x)$, co pokazano poniżej:

$$g(x) = \frac{1}{x} \tag{17}$$

$$h(x) = z \tag{18}$$

Poza tymi elementami nasze równanie zawiera również wyraz $z'$, który można również zapisać jako:

$$z' = \frac{dz}{dx} \tag{19}$$

Po wstawieniu tego wyrażenia można zauważyć, że w pózniejszych krokach pomnożenie równania obustronnie przez $dx$ umożliwia scałkowanie obu stron względem innych zmiennych.

## Całkowanie zmiennych rozdzielonych

Poniższe równanie należy zmodyfikować:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \tag{20}$$

W tym celu mnożymy obustronnie przez $dx$ oraz przenosimy $z(x)$ na przeciwną stronę równania:

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{x}dx \tag{21}$$

Następnie, aby "wrócić" do funkcji pierwotnej oraz otrzymać wynik w postaci funkcji $y$ całkujemy otrzymane równanie obustronnie: Co ważne, przy całkowaniu należy pamiętać o dodaniu stałej całkowania w dowolnej postaci naogół zapisywanej jako $C$ bądź $D$.

$$\int \frac{1}{z}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \tag{22}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy następujący wynik:

$$\frac{y}{z} = \log(x) + D \tag{23}$$

## Uproszczenie rozwiązania otrzymanego po scałkowaniu równań

Po uporządkowaniu oraz przeobrażeniu stałej wyrażenie ma następującą postać:

$$z(x) = C_1 x \tag{24}$$

Otrzymane wyrażenie stanowi rozwiązania równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych. Stała całkowania jest możliwa do policzenia w momencie w którym w zadaniu zostały podane warunki początkowe, czyli wartość funkcji dla konkretnego $x$.

## Uzmiennienie stałej

Kolejnym krokiem jest potraktowanie stałej jako funkcji zależnej od $x$:

$$y = x\left(\mathrm{C}_1(x) - \log(x)\right) \tag{25}$$

Następnie należy policzyć pochodne obu stron równaniaOtrzymując równanie następującej postaci

$$y' = -\log(x) + x\left(\mathrm{C'}(x) - \frac{1}{x}\right) + \mathrm{C}_1(x) \tag{26}$$

Dzięki tej operacji możemy teraz podstawić $y$ i $y'$ do oryginalnego równania

$$x - z(x) + x\frac{d}{dx}z(x) = 0 \tag{27}$$

I otrzymamy:

$$x + x\left(x\left(\mathrm{C'}(x) - \frac{1}{x}\right) + \mathrm{C}_1(x) - \log(x)\right) - x\left(\mathrm{C}_1(x) - \log(x)\right) = 0 \tag{28}$$

Następnie, jeżeli wszystko zostało policzne poprawnie to wartosci $C(x)$ powinny się skrócić i uprościć do postaci z której w łatwy sposób możemy wyznaczyć $C'(x)$ otrzymując:

$$\mathrm{C'}(x) = 0 \tag{29}$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymamy wartosć stałej:

$$\mathrm{C}_1(x) = 0 \tag{30}$$

Aby otrzymać ostateczny wynik musimy podstawić otrzymaną stałą do pierwszego równania w którym uzmiennilismy stałą:

$$y = -x\log(x) \tag{31}$$