

## Równanie różniczkowe drugiego rzędu - metoda przewidywań

Jednym z podstawowych typów równań różniczkowych drugiego rzędu jest równanie jednorodne o stałych współczynnikach. Proces rozwiązywania tego typu równania polega na przewidzeniu rozwiązania, które przyjmuje ogólną postać:

$$y(x) = Ce^{rx} \quad (1)$$

Na podstawie otrzymanych pierwiastków (rozwiązań) przewidywanego równania dobiera się docelowe równanie ogólne. Poniżej znajduje się przykład zadania ilustrującego proces rozwiązywania tego rodzaju równania:

### Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y'' - 7y' + 10y = 0 \quad (2)$$

Gdzie:

$$y(x) \quad (3)$$

Jest naszą szukaną funkcją.

### Przewidywanie rozwiązania

Pierwszym krokiem do rozwiązywania danego równania jest wyznaczenie pochodnych przewidywanego rozwiązania. Przypominając pierwotne równanie które przewidujemy jako nasze rozwiązanie ma następującą postać:

$$y = Ce^{rx} \quad (4)$$

A następnie znalezienie potrzebnych pochodnych. W przypadku równań drugiego rzędu jak nazwa wskazuje najwyższa pochodna jest drugiego stopnia stąd potrzebne nam dwie pierwsze pochodne przewidywanego rozwiązania. Pierwsza pochodna:

$$y' = Cre^{rx} \quad (5)$$

Druga pochodna:

$$y'' = Cr^2e^{rx} \quad (6)$$

Następnym krokiem jest podstawienie poszczególnych przewidywań do odpowiednich pochodnych w pierwotnym równaniu:

$$10Ce^{rx} + Cr^2e^{rx} - 7Cre^{rx} = 0 \quad (7)$$

Można zauważyć powtarzające się elementy i wyłączyć je przed nawias:

$$C(r^2 - 7r + 10)e^{rx} = 0 \quad (8)$$

Podstawowa zasada matematyki mówi, że jeśli iloczyn dwóch czynników jest równy zero, to przynajmniej jeden z tych czynników musi być równy zero. W metodzie przewidywań nie rozpatruje się jednak dwóch przypadków, ponieważ gdy stała całkowania, a zatem funkcja eksponenty, jest równa zero to zadanie staje się trywialne i nie wymaga dalszej analizy. Dlatego skupiamy się na drugim czynniku, powszechnie nazywanym równaniem charakterystycznym, które dostarczy nam pierwiastków niezbędnych do przewidzenia ostatecznego równania. Równanie poddawane dalszej analizie ma następującą postać:

$$10 + r^2 - 7r = 0 \quad (9)$$

Po rozwiązaniu pewnej liczby zadań można zauważyć pewną zależność wynikającą z powyższego przewidywania, co pozwoli na pominięcie tego kroku i podstawiania odpowiednich wartości zgodnie z poniższymi podstawieniami:

$$y = r^0 \quad (10)$$

$$y' = r^1 \quad (11)$$

$$y'' = r^2 \quad (12)$$

### Rozwiązanie równania charakterystycznego i ogólna analiza jego rozwiązania w kontekście rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu

W równaniach różniczkowych drugiego rzędu równanie charakterystyczne przyjmuje postać równania kwadratowego. Takie równanie może w rozwiązaniu dać trzy typy pierwiastków i w zależności od danego typu dobiera się rozwiązanie ogólne tego równania. Gdy policzona delta jest większa od zera, otrzymujemy dwa pierwiastki rzeczywiste o postaci  $r_0$  i  $r_1$ , a wtedy przewidywane rozwiązanie przyjmuje postać:

$$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 e^{r_1 x} \quad (13)$$

Gdy wyliczona delta jest równa 0, otrzymujemy jeden pierwiastek o postaci  $r_0$ , a wtedy przewidywane rozwiązanie przyjmuje postać:

$$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x} \quad (14)$$

Gdy wyliczona delta jest mniejsza od 0, otrzymujemy dwa pierwiastki zespolone o postaci:

$$r_0 = \alpha + \beta i \quad (15)$$

$$r_1 = \alpha - \beta i \quad (16)$$

Gdzie  $\alpha$  to część rzeczywista pierwiastka, a  $\beta$  to część urojona. Przewidywane rozwiązanie w takim wypadku przyjmuje następującą postać:

$$y = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \quad (17)$$

Równanie charakterystyczne w danym przykładzie ma postać:

$$10 + r^2 - 7r = 0 \quad (18)$$

Pierwiastki tego równania przyjmują postać:

$$r_0 = 2 \quad (19)$$

$$r_1 = 5 \quad (20)$$

Po rozpoznaniu typu pierwiastków możemy zapisać rozwiązanie jako:

$$y = (C_1 + C_2 e^{3x}) e^{2x} \quad (21)$$