DRGANIA MECHANICZNE

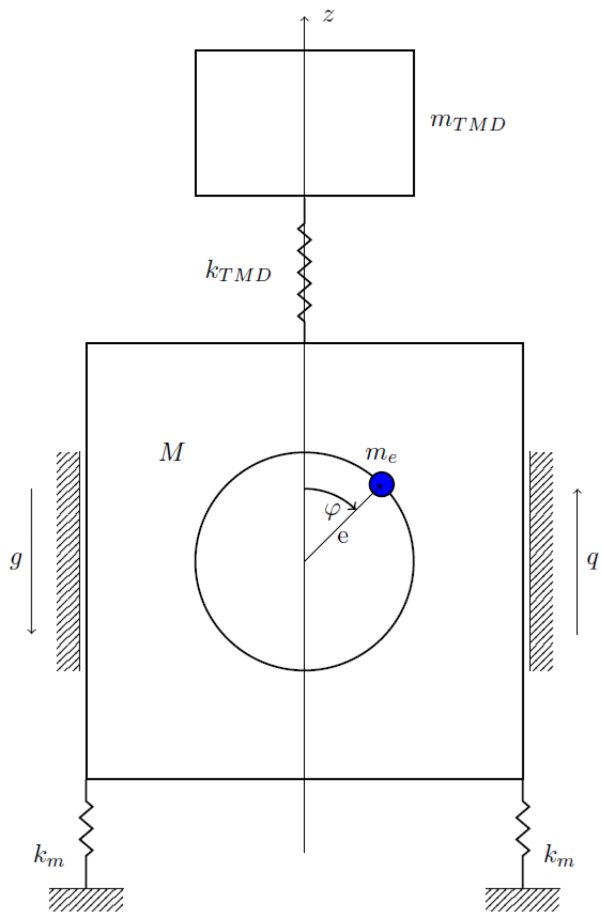
NIETŁUMIONE UKŁADY O WIELU STOPNIACH SWOBODY

Engine With TMD Report z 2 St.S. dla $\varphi(t) = \Omega t$, $M = m_{TMD}$, $m_e = m_{TMD}$, $k_m = k_{TMD}$

3 lutego 2024

Schemat systemu

Ilustracja przedstawia schemat rzeczywistego obiektu mechanicznego, wyznaczony na podstawie uprzedniej analizy rzeczywistego obiektu.



Analizując przedstawiony układ można stwierdzić, że jego liczba stopni swobody to 2.

Tabelka z wartościami parametrów do obliczeń

Przyjęte do obliczeń wartości poszczególnych parametrów przedstawia tabelka 1

Tabela 1: Podstawowe wartości parametrów

Parametr	Wartość
φ	Ωt
M	m_{TMD}
m_e	m_{TMD}
k_m	k_{TMD}

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna układu wyrażona jest wzorem:

$$T = \frac{m_{TMD} \left(\Omega e \sin\left(\Omega t\right) - \dot{z}\right)^{2}}{2} + \frac{m_{TMD} \dot{z}^{2}}{2} + \frac{m_{TMD} \dot{z}_{TMD}^{2}}{2} \tag{1}$$

Wyznaczona wielkość określa energię układu wynikającą z jego własności inercyjnych (energię zmagazynowaną w elementach bezwładnych).

Energia potencjalna

Energia potencjalna układu wyrażona jest wzorem:

$$V = k_{TMD} z^{2} + \frac{k_{TMD} \left(z - z_{TMD}\right)^{2}}{2} + g m_{TMD} \left(e \cos\left(\Omega t\right) + z\right) + g m_{TMD} z + g m_{TMD} z_{TMD} \tag{2}$$

Zaprezentowana zależność opisuje oddziaływanie potencjalnych pól sił w których znajduje się obiekt.

Lagrangian układu (Funkcja Lagrange'a)

Lagrangian układu dany jest następującym wyrażeniem (3):

$$\begin{aligned} L = m_{TMD} \dot{z}^{2} + \frac{m_{TMD} \dot{z}_{TMD}^{2}}{2} - \frac{3 k_{TMD} z^{2}}{2} - \frac{k_{TMD} z_{TMD}^{2}}{2} + k_{TMD} z z_{TMD} - g m_{TMD} z_{TMD} - 2 g m_{TMD} z \\ + \frac{\Omega^{2} e^{2} m_{TMD} \sin^{2}\left(\Omega t\right)}{2} - e g m_{TMD} \cos\left(\Omega t\right) - \Omega e m_{TMD} \sin\left(\Omega t\right) \dot{z} \end{aligned} \tag{3}$$

Równania Eulera Lagrange'a dla rozważanego przypadku są następujące:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = Q_{z}^{N} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_{TMD}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}_{TMD}} - \frac{\partial L}{\partial z_{TMD}} = Q_{z_{TMD}}^{N} \tag{5}$$

Kolejne pochodne wynikające z zastosowania równań Eulera-Lagrange'a są nastęujące:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = k_{TMD} z_{TMD} - 3 k_{TMD} z - 2 g m_{TMD} \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_{TMD}} = k_{TMD} z - g m_{TMD} - k_{TMD} z_{TMD} \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 2 m_{TMD} \dot{z} - \Omega e m_{TMD} \sin\left(\Omega t\right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_{TMD}} = m_{TMD} \dot{z}_{TMD} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 2 m_{TMD} \ddot{z} - \Omega^{2} e m_{TMD} \cos\left(\Omega t\right) \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_{TMD}} = m_{TMD}\ddot{z}_{TMD} \tag{11}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}_{TMD}} = 0 \tag{13}$$

Wyniki przedstawionych operacji wykorzystuje się wyznaczenia równań ruchu układu.

Równanie ruchu

Wykorzystując obliczone pochodne, wyznacza się równania ruchu na podstawie odpowiedniego wzoru. Równania ruchu układu przedstawiają zależności: (14)- (15)

$$k_{TMD}z_{TMD} + 2gm_{TMD} + 2m_{TMD}\ddot{z} + 3k_{TMD}z - \Omega^{2}em_{TMD}\cos(\Omega t) = 0 \tag{14}$$

$$gm_{TMD} + k_{TMD}z_{TMD} + m_{TMD}\ddot{z}_{TMD} - k_{TMD}z = 0 \tag{15}$$

Wyznaczone równania stanowią matematyczny opis dynamiczny właściwości układu. Dalsza analiza pozwala na skuteczną analizę działania modelowanego obiektu i określenie jego parametrów mechanicznych.

Wyznaczanie macierzy fundamentalnej

Z równań ruchu wyznaczono macierz mas i sztywności układu::

$$M = \begin{bmatrix} 2m_{TMD} & 0 \\ 0 & m_{TMD} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3k_{TMD} & -k_{TMD} \\ -k_{TMD} & k_{TMD} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Macierz fundamentalna, na podstawie której wyznaczono równanie charakterystyczne rozważanego układu Δ, przedstawiają się następująco::

$$A = \begin{bmatrix} 3k_{TMD} - 2m_{TMD}\omega^{2} & -k_{TMD} \\ -k_{TMD} & k_{TMD} - m_{TMD}\omega^{2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\Delta = 2k_{TMD}^{2} + 2m_{TMD}^{2}\omega^{4} - 5k_{TMD}m_{TMD}\omega^{2} \tag{19}$$

Macierz fundamentalna pozwala określić rozwiązanie ustalone. Natomiast bazując na równaniu charakterystycznym określa się częstości własne układu.

Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne przedstawia wyrażenie:

$$X_{g-z(t)} = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_{TMD}}t}{\sqrt{m_{TMD}}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_{TMD}}t}{2\sqrt{m_{TMD}}}\right) + C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_{TMD}}t}{2\sqrt{m_{TMD}}}\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_{TMD}}t}{\sqrt{m_{TMD}}}\right) \tag{20}$$

$$X_{g-zTMD(t)} = -C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_{TMD}}t}{\sqrt{m_{TMD}}}\right) - C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_{TMD}}t}{\sqrt{m_{TMD}}}\right) + 2.0C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_{TMD}}t}{2\sqrt{m_{TMD}}}\right) + 2.0C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{k_{TMD}}t}{2\sqrt{m_{TMD}}}\right) \tag{21}$$

Rozwiązanie ogólne opisuje ruch analizowanego układu (przedstawia przemieszczenie w funkcji czasu) i wynika z rozważań dotyczących drgań swobodnych układu.

Rozwiązanie szczególne

Rozwiązanie szczególne dane jest następującym wyrażeniem:

$$X_{s-z(t)} = \left(\frac{0.333\Omega^2 e}{-\Omega^2 + \frac{2.0k_{TMD}}{m_{TMD}}} + \frac{0.167\Omega^2 e}{-\Omega^2 + \frac{0.5k_{TMD}}{m_{TMD}}}\right)\cos(\Omega t) \tag{22}$$

$$X_{s-zTMD(t)} = \left(\frac{0.167\Omega^2 e}{-\Omega^2 + \frac{2.0k_{TMD}}{m_{TMD}}} - \frac{0.167\Omega^2 e}{-\Omega^2 + \frac{0.5k_{TMD}}{m_{TMD}}}\right)\cos(\Omega t) - \frac{g m_{TMD}}{k_{TMD}} \tag{23}$$

Rozwiązanie szczególne układu przedstawia zależność położenia od czas odpowiednią dla drgań wymuszonych