Niejednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu - metoda przewidywań

Jednym z klasycznych typów równań różniczkowych drugiego rzędu jest równanie niejednorodne o stałych współczynnikach . Proces rozwiązania tego typu równania polega na przewidzeniu rozwiązania, najpierw równania jednorodnego (przykłady rozwiązane wcześniej), które przyjmuje ogólną postać:

$$y(x) = Ce^{rx} \tag{1}$$

Na podstawie otrzymanych pierwiastków (rozwiązań) przewidywanego równania jednorodnego dobiera się docelowe równanie ogólne. Następnym krokiem jest przewidzenie tak zwanego rozwiązania szczególnego. Ogólne przewidywanie przybiera następującą postać:

$$y(x) = \left(P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\sin(\beta x)\right)e^{\alpha x} \tag{2}$$

Następnie rozważamy czy poniższe wyrażenie:

$$\alpha + \beta i \tag{3}$$

jest pierwiastkiem równania charakterystycznego i w zależności od wyniku dobieramy rozwiązanie. Jeżeli wartość powyższego wyrażenia jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to rozwiązanie szczególne można zapisać jako:

$$y(x) = x^{\kappa}\left(R(x)\cos(\beta x) + S(x)\sin(\beta x)\right)e^{\alpha x} \tag{4}$$

Gdzie κ to wielokrotność pierwiastka, a R(x) i S(x) to wielomiany o stopniu równym najwyższemu stopniowi wielomianu P(x) lub Q(x). Jeżeli wartość tego wyrażenia nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to rozwiązanie przyjmuje postać:

$$y(x) = \left(R(x)\cos(\beta x) + S(x)\sin(\beta x)\right)e^{\alpha x} \tag{5}$$

Następnie nieznane stałe wylicza się z układu równań składającego się z kolejnych pochodnych równania. Przykładowe rozwiązanie zadania zostało zaprezentowane poniżej:

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y'' + 9y - x\cos(x) = 0 \tag{6}$$

Gdzie:

$$y(x) \tag{7}$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Przewidywanie rozwiązania równania jednorodnego

Pierwszym krokiem do rozwiązania danego równania jest wyznaczenie pochodnych przewidywanego rozwiązania. Przypominając pierwotne równanie które przewidujemy jako nasze rozwiązanie ma następującą postać:

$$y = Ce^{rx} \tag{8}$$

A następnie znalezienie potrzebnych pochodnych. W przypadku równań drugiego rzędu jak nazwa wskazuje najwyższa pochodna jest drugiego stopnia stąd potrzebne nam dwie pierwsze pochodne przewidywanego rozwiązania. Pierwsza pochodna:

$$y' = Cre^{rx} \tag{9}$$

Druga pochodna:

$$y'' = Cr^2e^{rx} \tag{10}$$

Następnym krokiem jest podstawienie poszczególnych przewidywań do odpowiednich pochodnych w pierwotnym równaniu:

$$9Ce^{rx} + Cr^2e^{rx} = 0 \tag{11}$$

Można zauważyć powtarzające się elementy i wyłączyć je przed nawias:

$$C\left(r^2 + 9\right)e^{rx} = 0 \tag{12}$$

Podstawowa zasada matematyki mówi, że jeśli iloczyn dwóch czynników jest równy zero, to przynajmniej jeden z tych czynników musi być równy zero. W metodzie przewidywań nie rozpatruje się jednak dwóch przypadków, ponieważ gdy stała całkowania, a zatem funkcja eksponenty, jest równa zeru to zadanie staje się trywialne i nie wymaga dalszej analizy. Dlatego skupiamy się na drugim czynniku, powszechnie nazywanym równaniem charakterystycznym, które dostarczy nam pierwiastków niezbędnych do przewidzenia ostatecznego równania. Równanie poddawane dalszej analizie ma następująca postać:

$$9 + r^2 = 0 \tag{13}$$

Po rozwiązaniu pewnej liczby zadań można zauważyć pewną zależność wynikającą z powyższego przewidywania, co pozwoli na pominięcie tego kroku i podstawiania odpowiednich wartości zgodnie z poniższymi podstawieniami:

$$y = r^0 \tag{14}$$

$$y' = r^1 \tag{15}$$

$$y'' = r^2 \tag{16}$$

Rozwiązanie równania charakterystycznego i ogólna analiza jego rozwiązania w kontekście rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu

W równaniach różniczkowych drugiego rzędu równanie charakterystyczne przyjmuje postać równania kwadratowego. Takie równanie może w rozwiązaniu dać trzy typy pierwiastków i w zależności od danego typu dobiera się rozwiązanie ogólne tego równania. Gdy policzona delta jest większa od zera, otrzymujemy dwa pierwiastki rzeczywiste o postaci r_0 i r_1, a wtedy przewidywane rozwiązanie przyjmuje postać:

$$y = C_1e^{r_0x} + C_2e^{r_1x} \tag{17}$$

Gdy wyliczona delta jest równa 0, otrzymujemy jeden pierwiastek o postaci r_0, a wtedy przewidywane rozwiązanie przyjmuje postać:

$$y = C_1e^{r_0x} + C_2xe^{r_0x} \tag{18}$$

Gdy wyliczona delta jest mniejsza od 0, otrzymujemy dwa pierwiastki zespolone o postaci:

$$r_0 = \alpha + \beta i \tag{19}$$

$$r_1 = \alpha - \beta i \tag{20}$$

Gdzie α to część rzeczywista pierwiastka, a β to część urojona. Przewidywane rozwiązanie w takim wypadku przyjmuje następującą postać:

$$y = \left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x} \tag{21}$$

Równanie charakterystyczne w danym przykładzie ma postać:

$$9 + r^2 = 0 \tag{22}$$

Pierwiastki tego równania przyjmują postać:

$$r_0 = -3i \tag{23}$$

$$r_1 = 3i \tag{24}$$

Po rozpoznaniu typu pierwiastków możemy zapisać rozwiązanie jako:

$$y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) \tag{25}$$

Rozwiązanie równania szczególnego i ogólna analiza jego rozwiązania w kontekście rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu

Aby rozwiązać równanie szczególne należy porównać ogólne równanie:

$$y = \left(P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x} \tag{26}$$

Z częścią naszego równania która nie jest zależna od szukanej funkcji. W tym przypadku:

$$y = x \cos(x) \tag{27}$$

Po odczytaniu współczynników:

$$\alpha = 0 \tag{28}$$

$$\beta = 1 \tag{29}$$

$$P(x) = x \tag{30}$$

$$Q(x) = 0 \tag{31}$$

Następnie należy sprawdzić warunek, czy poniższe równanie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego:

$$\alpha + i\beta = i \tag{32}$$

Wyliczone wcześniej rozwiązania równania charakterystycznego:

$$r_0 = -3i \tag{33}$$

$$r_1 = 3i \tag{34}$$

Otrzymana wartość wyrażenia nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc rozwiązanie przyjmuje postać:

$$y = (R(x)\cos(\beta x) + S(x)\sin(\beta x))\,e^{\alpha x} \tag{35}$$

Gdzie R(x) i S(x) to wielomiany o stopniu równym najwyższemu stopniowi wielomianu P(x) lub Q(x).Po podstawieniu znanych parametrów:

$$y = R(x)\cos(x) + S(x)\sin(x) \tag{36}$$

Stopień nieznanych wielomianów wynosi 1.

Tabela 1: Podstawione wielomiany względem najwyższej potęgi w równaniu niejednorodnym

Symbol	$R(x)$	$S(x)$
Wartość	$Ax + B$	$Cx + D$

Do przewidywanego równania podstawiamy wielomiany oraz wyliczamy kolejno pochodne:

$$y = (Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x) \tag{37}$$

$$y' = A\cos(x) + C\sin(x) + (Cx + D)\cos(x) - (Ax + B)\sin(x) \tag{38}$$

$$y'' = -(Ax + B)\cos(x) - (Cx + D)\sin(x) - 2A\sin(x) + 2C\cos(x) \tag{39}$$

Następnie podstawiamy je do pierwotnego równania:

$$2A\sin(x) + 2C\cos(x) + 8(Ax + B)\cos(x) + 8(Cx + D)\sin(x) = x\cos(x) \tag{40}$$

Kolejnym krokiem jest wyliczenie stałych poprzez porównanie obydwu stron równania. Porównując czynniki przed cosinusem:

$$2C + 8B + 8Ax = x \tag{41}$$

Porównując czynniki przed sinusem:

$$2A + 8D + 8Cx = 0 \tag{42}$$

W związku z tym, że współczynnik α jest równy 0, nie porównujemy czynników przed funckją wykładniczą.Rozbijając na jeszcze szczególniejsze czynniki otrzymujemy układ równań:

$$8A = 1 \tag{43}$$

$$2C + 8B = 0 \tag{44}$$

$$8C = 0 \tag{45}$$

$$2A + 8D = 0 \tag{46}$$

Tabela 2: Wyliczone stałe

Symbol	A	B	C	D
Wartość	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{32}$

Następnie po wstawieniu otrzymanych stałych otrzymujemy rozwiązanie szczególne:

$$y_p = \frac{\sin(x)}{32} + \frac{x\cos(x)}{8} \tag{47}$$

Dodając rozwiązanie ogólne i szczególne otrzymujemy rozwiązanie całego równania rózniczkowego niejednorodnego drugiego rzędu:

$$y = \frac{\sin(x)}{32} + C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + \frac{x\cos(x)}{8} \tag{48}$$