Równanie różniczkowe drugiego rzędu - metoda przewidywań

Jednym z podstawowych typów równań różniczkowych drugiego rzędu jest równanie jednorodne o stałych współczynnikach . Proces rozwiązania tego typu równania polega na przewidzeniu rozwiązania, które przyjmuje ogólną postać:

$$y(x) = Ce^{rx} \tag{1}$$

Na podstawie otrzymanych pierwiastków (rozwiązań) przewidywanego równania dobiera się docelowe równanie ogólne. Poniżej znajduje się przykład zadania ilustrującego proces rozwiązania tego rodzaju równania:

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y'' + 10y - 0.5y' = 0 \tag{2}$$

Gdzie:

$$y(x) \tag{3}$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Przewidywanie rozwiązania

Pierwszym krokiem do rozwiązania danego równania jest wyznaczenie pochodnych przewidywanego rozwiązania. Przypominając pierwotne równanie które przewidujemy jako nasze rozwiązanie ma następującą postać:

$$y = Ce^{rx} \tag{4}$$

A następnie znalezienie potrzebnych pochodnych. W przypadku równań drugiego rzędu jak nazwa wskazuje najwyższa pochodna jest drugiego stopnia stąd potrzebne nam dwie pierwsze pochodne przewidywanego rozwiązania. Pierwsza pochodna:

$$y' = Cre^{rx} \tag{5}$$

Druga pochodna:

$$y'' = Cr^2e^{rx} \tag{6}$$

Następnym krokiem jest podstawienie poszczególnych przewidywań do odpowiednich pochodnych w pierwotnym równaniu:

$$10Ce^{rx} + Cr^2e^{rx} - 0.5Cre^{rx} = 0 \tag{7}$$

Można zauważyć powtarzające się elementy i wyłączyć je przed nawias:

$$C\left(r^2 - 0.5r + 10\right)e^{rx} = 0 \tag{8}$$

Podstawowa zasada matematyki mówi, że jeśli iloczyn dwóch czynników jest równy zero, to przynajmniej jeden z tych czynników musi być równy zero. W metodzie przewidywań nie rozpatruje się jednak dwóch przypadków, ponieważ gdy stała całkowania, a zatem funkcja eksponenty, jest równa zeru to zadanie staje się trywialne i nie wymaga dalszej analizy. Dlatego skupiamy się na drugim czynniku, powszechnie nazywanym równaniem charakterystycznym, które dostarczy nam pierwiastków niezbędnych do przewidzenia ostatecznego równania. Równanie poddawane dalszej analizie ma następująca postać:

$$10 + r^2 - 0.5r = 0 \tag{9}$$

Po rozwiązaniu pewnej liczby zadań można zauważyć pewną zależność wynikającą z powyższego przewidywania, co pozwoli na pominięcie tego kroku i podstawiania odpowiednich wartości zgodnie z poniższymi podstawieniami:

$$y = r^0 \tag{10}$$

$$y' = r^1 \tag{11}$$

$$y'' = r^2 \tag{12}$$

Rozwiązanie równania charakterystycznego i ogólna analiza jego rozwiązania w kontekście rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu

W równaniach różniczkowych drugiego rzędu równanie charakterystyczne przyjmuje postać równania kwadratowego. Takie równanie może w rozwiązaniu dać trzy typy pierwiastków i w zależności od danego typu dobiera się rozwiązanie ogólne tego równania. Gdy policzona delta jest większa od zera, otrzymujemy dwa pierwiastki rzeczywiste o postaci r_0 i r_1, a wtedy przewidywane rozwiązanie przyjmuje postać:

$$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 e^{r_1 x} \tag{13}$$

Gdy wyliczona delta jest równa 0, otrzymujemy jeden pierwiastek o postaci r_0, a wtedy przewidywane rozwiązanie przyjmuje postać:

$$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x} \tag{14}$$

Gdy wyliczona delta jest mniejsza od 0, otrzymujemy dwa pierwiastki zespolone o postaci:

$$r_0 = \alpha + \beta i \tag{15}$$

$$r_1 = \alpha - \beta i \tag{16}$$

Gdzie α to część rzeczywista pierwiastka, a β to część urojona. Przewidywane rozwiązanie w takim wypadku przyjmuje następującą postać:

$$y = \left(C_1 \cos\left(\beta x\right) + C_2 \sin\left(\beta x\right)\right) e^{\alpha x} \tag{17}$$

Równanie charakterystyczne w danym przykładzie ma postać:

$$10 + r^2 - 0.5r = 0 \tag{18}$$

Pierwiastki tego równania przyjmują postać:

$$r_0 = 0.25 - 3.15238005322962i \tag{19}$$

$$r_1 = 0.25 + 3.15238005322962i \tag{20}$$

Po rozpoznaniu typu pierwiastków możemy zapisać rozwiązanie jako:

$$y = \left(C_1 \sin\left(3.15238005322962x\right) + C_2 \cos\left(3.15238005322962x\right)\right) e^{0.25x} \tag{21}$$