

Podstawowa wiedza niezbędna do rozwiązania równania różniczkowego

Jednym z najbardziej podstawowych typów równań różniczkowych jest równanie liniowe o stałych współczynnikach. Równanie liniowe składa się jedynie z liniowych wyrazów, które mogą zawierać stałe współczynniki. Wymagane jest przejście na równanie jednorodne- przenosimy wszystkie wyrazy z funkcją y i jej pochodnymi, po czym przyrównujemy do zera otrzymując równanie jednorodne. Następnie wymagane jest uzmiennienie stałej i traktowanie jej jako funkcji zależnej od x . Liczymy pochodne obu stron i wykorzystujemy wyniki w początkowym równaniu. Wynikiem jest suma rozwiązań z obu części

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y' + y \cos(x) - \sin(x) \cos(x) = 0 \quad (1)$$

Gdzie:

$$y(x) \quad (2)$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Przejsie na równanie jednorodne

Przenosimy wszystkie elementy z funkcją y i jej pochodnymi na jedną stronę i przyrównujemy do zera, otrzymując równanie jednorodne.

Rozwiązanie powstałego równania o zmiennych rozdzielonych

Uzyskane równanie jednorodne jest równaniem o zmiennych rozdzielonych i przyjmuje postać:

$$y(x) \cos(x) + \frac{d}{dx} y(x) = 0 \quad (3)$$

Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe:

$$y' + y \cos(x) = 0 \quad (4)$$

Gdzie:

$$y(x) \quad (5)$$

Jest naszą szukaną funkcją.

Rodzielanie zmiennych

Jeżeli jest to możliwe, dokonujemy powszechnie znanego rozdzielenia zmiennych x i y . Poprzez rozdzielenie zmiennych rozumie się oddzielenie wyrazów zawierających zmienną x od tych, które zawierają zmienną y . W celu dokonania tego podziału, możemy przyporządkować te wyrazy do funkcji $h(x)$ i $g(x)$, co pokazano poniżej:

$$g(x) = -\cos(x) \quad (6)$$

$$h(x) = y \quad (7)$$

Poza tymi elementami nasze równanie zawiera również wyraz y' , który można również zapisać jako:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad (8)$$

Po wstawieniu tego wyrażenia można zauważyć, że w późniejszych krokach pomnożenie równania obustronnie przez dx umożliwia scałkowanie obu stron względem innych zmiennych.

Całkowanie zmiennych rozdzielonych

Poniższe równanie należy zmodyfikować:

$$\frac{dy}{dx} = -y \cos(x) \quad (9)$$

W tym celu mnożymy obustronnie przez dx oraz przenosimy $y(x)$ na przeciwną stronę równania:

$$\frac{dy}{y} = -\cos(x) dx \quad (10)$$

Następnie, aby "wrócić" do funkcji pierwotnej oraz otrzymać wynik w postaci funkcji y całkujemy otrzymane równanie obustronnie: Co ważne, przy całkowaniu należy pamiętać o dodaniu stałej całkowania w dowolnej postaci naogół zapisywanej jako C bądź D .

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (-\cos(x)) dx \quad (11)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy następujący wynik:

$$\log(y) = -\sin(x) + D \quad (12)$$

Uproszczenie rozwiązania otrzymanego po scałkowaniu równań

Po uporządkowaniu oraz przeobrażeniu stałej wyrażenie ma następującą postać:

$$y(x) = C_1 e^{-\sin(x)} \quad (13)$$

Otrzymane wyrażenie stanowi rozwiązanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych. Stała całkowania jest możliwa do policzenia w momencie w którym w zadaniu zostały podane warunki początkowe, czyli wartość funkcji dla konkretnego x .

Uzmiennienie stałej

Kolejnym krokiem jest potraktowanie stałej jako funkcji zależnej od x :

$$y = -1 + C_1(x) e^{-\sin(x)} + \sin(x) \quad (14)$$

Następnie należy policzyć pochodne obu stron równania Otrzymując równanie następującej postaci

$$y' = C'(x) e^{-\sin(x)} - C_1(x) e^{-\sin(x)} \cos(x) + \cos(x) \quad (15)$$

Dzięki tej operacji możemy teraz podstawić y i y' do oryginalnego równania

$$y(x) \cos(x) - \sin(x) \cos(x) + \frac{d}{dx} y(x) = 0 \quad (16)$$

I otrzymamy:

$$\left(C_1(x) e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1 \right) \cos(x) + C'(x) e^{-\sin(x)} - \sin(x) \cos(x) - C_1(x) e^{-\sin(x)} \cos(x) + \cos(x) = 0 \quad (17)$$

Następnie, jeżeli wszystko zostało policzone poprawnie to wartości $C(x)$ powinny się skrócić i uprościć do postaci z której w łatwy sposób możemy wyznaczyć $C'(x)$ otrzymując:

$$C'(x) = 0 \quad (18)$$

Po obustronnym scałkowaniu otrzymamy wartość stałej:

$$C_1(x) = 0 \quad (19)$$

Aby otrzymać ostateczny wynik musimy podstawić otrzymaną stałą do pierwszego równania w którym uzmienniliśmy stałą:

$$y = -1 + \sin(x) \quad (20)$$