1 Wzory niezbędne do wykonania zadania:

Momenty bezwładnosci względem osi:

$$Ix = \int^{m} \left(y^2 + z^2\right)\, dm \tag{1}$$

$$Iy = \int^{m} \left(x^2 + z^2\right)\, dm \tag{2}$$

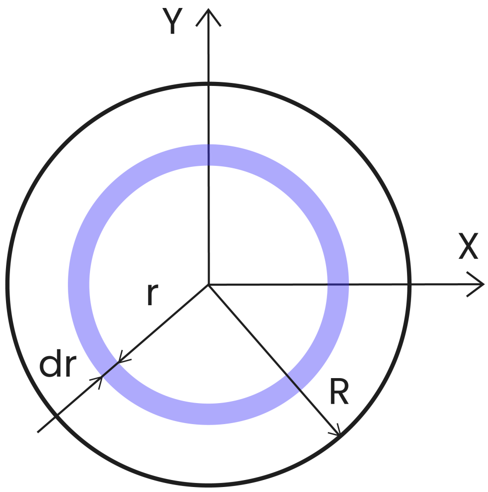
$$Iz = \int^{m} \left(x^2 + y^2\right)\, dm \tag{3}$$

Reguła Pappus-Guldinus dla objętości obracanego obiektu:

$$v = \int^{a} 2\pi r\, da \tag{4}$$

2 Analiza problemu

Określ moment bezwładności płaskiej, jednorodnej i cienkiej płyty w kształcie koła o masie m, o promieniu R, względem osi prostopadłej do niej i przechodzącej przez środek masy.



3 Wstępne przekształcenia wzorów

Wykorzystamy wzór na moment bezwładności względem osi obrotu oraz względem płaszczyzny

$$Iz = \int^{m} \left(y^2 + z^2\right)\, dm \tag{5}$$

$$Iz = \rho \int^{v} \left(y^2 + z^2\right)\, dv \tag{6}$$

4 Znalezienie momentu bezwładności bryły

Liczymy momentu bezwładności dla osi Iz, by to zrobić wycinamy z dysku pierścień o grubości dr, tak jak na obrazku powyżej przy pomocy którego policzymy moment.

$$Iz = \rho \int^{v} \left(y^2 + z^2\right) \, dv \tag{7}$$

Zmieniamy równanie z koordynatów kartezjańskich na polarne:

$$Iz = \rho \int^{v} r^2 \, dv \tag{8}$$

Następnie przekształcamy dv, według reguły Pappus-Guldinus:

$$dv = 2dr\pi r \tag{9}$$

Wracając do równania i przekształcając ograniczenia całki by spełniania warunki reguły, otrzymujemy:

$$Iz = \rho \int_{0}^{R} 2\pi r^3 \, dr \tag{10}$$

$$Iz = \frac{R^4 \pi \rho}{2} \tag{11}$$