

## 1 Podstawowe prawa dynamiki potrzebne do rozwiązania problemu:

Pierwsza zasada dynamiki Newtona: Jeżeli na dane ciało nie działają żadne inne ciała, lub działania innych ciał równoważą się, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

$$F\Sigma = 0 \quad (1)$$

Druga zasada dynamiki Newtona: Jeżeli na ciało działa stała siła wypadkowa, to ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem wprost proporcjonalnym do działającej siły, a odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$m\ddot{x} = F\Sigma \quad (2)$$

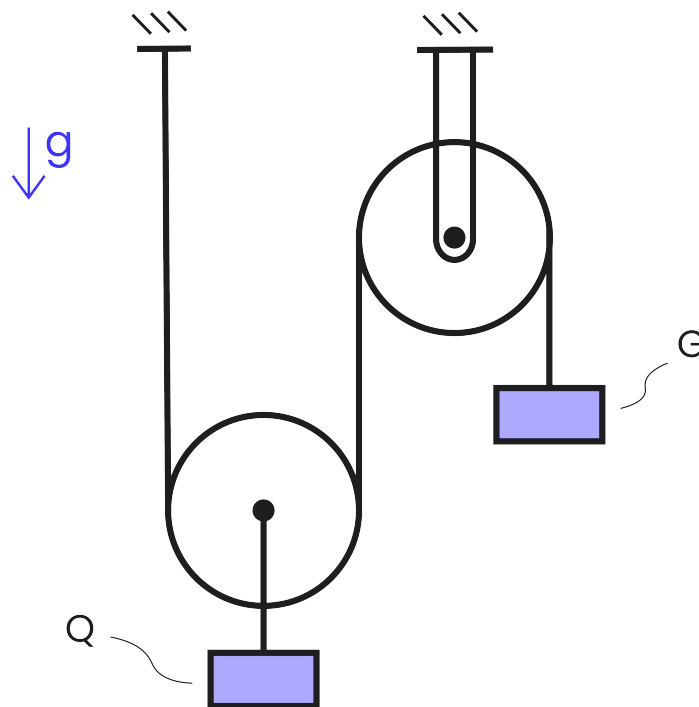
$$m\ddot{y} = F\Sigma \quad (3)$$

Trzecia zasada dynamiki Newtona: Oddziaływanie dwóch ciał jest zawsze wzajemne. Jeżeli jedno ciało działa na drugie pewną siłą, to drugie działa na ciało pierwsze siłą taką samą co do wartości i kierunku, a o zwrocie przeciwnym.

$$F_A = -F_R \quad (4)$$

## 2 Sformułowanie problemu

Dwa punkty materialne o ciężarach  $Q$  i  $G$  połączone są nieważką nierozciągliwą nicią poprzez nieważkie bloczki, w sposób pokazany na rysunku i podtrzymywane w spoczynku w polu grawitacyjnym. W chwili  $t=0$  siły podtrzymujące usunięto i rozpoczął się ruch pod wpływem sił ciężkości  $Q$  i  $G$ , bez oporów i bez poślizgu nici po bloczkach. Znaleźć prędkości obu ciał jako funkcje czasu oraz siłę napięcia nici.



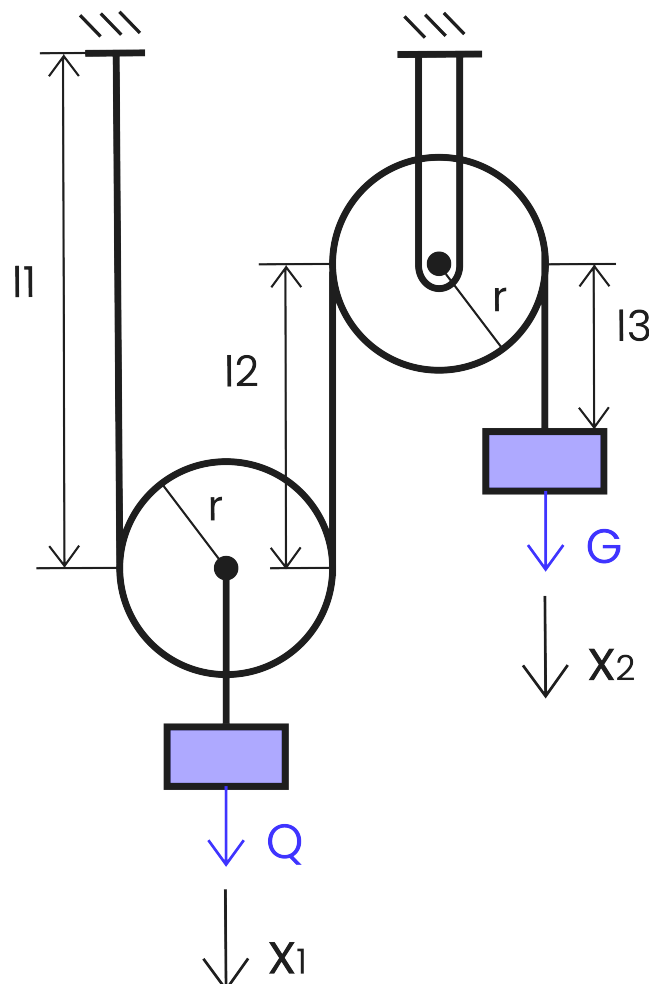
### 3 Analiza problemu

Do prawidłowego wykonania zadania należy przyjąć następujące kroki:

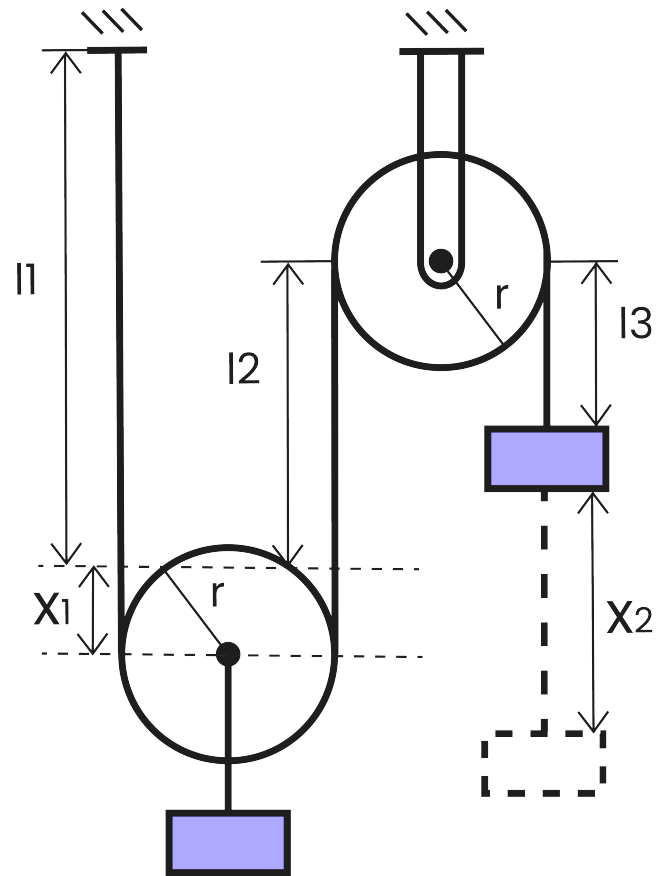
- Zauważyć zależności wynikające z długości nierozciągliwej nici
- Stworzyć wykres rozkładu sił
- Ułożyć równania ruchu oraz równania momentów sił
- Obliczenie prędkości obu ciał jako funkcje czasu
- Obliczenie siłę napięcia nici

### 4 Zależności wynikające z długości nierozciągliwej nici

Pierwszym krokiem jest przeanalizowanie jak działa mechanizm podany w zadaniu:



Z powyższego obrazka widzimy, że łączna długość nici przed wprawieniem mechanizmu w ruch (fragmenty opasujące koło oraz fragmenty oznaczone symbolem  $l$ ) to:



Natomiast po rozpoczęciu ruchu: Równanie długości nici można zapisać następująco:

$$l_1 + l_2 + l_3 + 2x_1 + 2\pi r + x_2 \quad (5)$$

Z treści zadania wiemy, że długość nici się nie zmienia, stąd:

$$l_1 + l_2 + l_3 + 2\pi r = l_1 + l_2 + l_3 + 2x_1 + 2\pi r + x_2 \quad (6)$$

Następnie upraszczając:

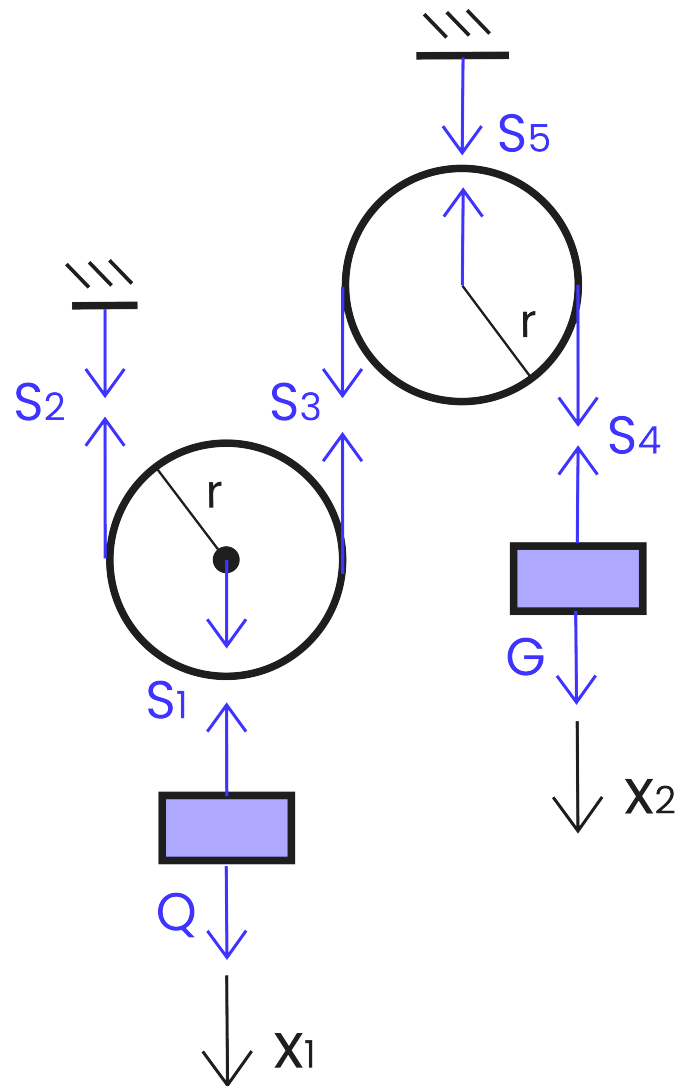
$$x_2 = -2x_1 \quad (7)$$

Stąd wiemy, że:

$$\ddot{x}_2 = -2\ddot{x}_1 \quad (8)$$

## 5 Wykres rozkładu sił

Drugim krokiem do poprawnego rozwiązania tego problemu jest skonstruowanie schematu z rozkładem działających sił. Prezentuje się on następująco:



## 6 Równania ruchu i momentu sił

Równania ruchu wyprowadzone z drugiego prawa dynamiki Newtona. Dla pierwszego ciężarka :

$$Q - S_1 = \frac{Q\ddot{x}_1}{g} \quad (9)$$

Dla drugiego ciężarka :

$$G - S_4 = \frac{G\ddot{x}_2}{g} \quad (10)$$

Dodatkowo:

$$S_1 = S_2 + S_3 \quad (11)$$

$$S_5 = S_2 + S_3 \quad (12)$$

Równanie dla momentów sił (suma momentów sił jest równa 0, gdyż nie występuje poślizg). Względem środka pierwszego bloczka :

$$0 = S_2r - S_3r \quad (13)$$

Względem środka drugiego bloczka :

$$0 = S_4 r - S_3 r \quad (14)$$

Z tego wynika, że :

$$S_2 = S_3 \quad (15)$$

$$S_3 = S_4 \quad (16)$$

Aby uprościć obliczenia przyjmijmy te równe sobie wartości jako  $S$ . Należy jedynie policzyć  $S_1$  :

$$S_1 = S_2 + S_3 \quad (17)$$

$$S_1 = 2S \quad (18)$$

## 7 Obliczenie prędkości dwóch ciężarków

Do policzenia prędkości po obydwu osiach potrzebne nam są te 3 równania z podstawionymi odpowiednimi wartościami  $S$  :

$$\ddot{x}_2 = -2\ddot{x}_1 \quad (19)$$

$$Q - 2S = \frac{Q\ddot{x}_1}{g} \quad (20)$$

$$G - S = \frac{G\ddot{x}_2}{g} \quad (21)$$

Za pomocą pierwszego równania podstawić do równania trzeciego :

$$G - S = -\frac{2G\ddot{x}_1}{g} \quad (22)$$

Następnie dla uproszczenia rachunków należy pomnożyć obie strony równania przez  $-2$  :

$$2G + 2S = \frac{4G\ddot{x}_1}{g} \quad (23)$$

Dodając równania stronami :

$$Q - 2G = \frac{Q\ddot{x}_1}{g} + \frac{4G\ddot{x}_1}{g} \quad (24)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{g(-2G + Q)}{4G + Q} \quad (25)$$

Z racji, że prawa strona równania to stała, aby scałkować wystarczy prawą stronę pomnożyć przez  $t$  :

$$\dot{x}_1 = \frac{gt(-2G + Q)}{4G + Q} \quad (26)$$

Wiemy też, że :

$$\ddot{x}_2 = -2\ddot{x}_1 \quad (27)$$

Co odnosi się także do pierwszej pochodnej i z tego wyliczymy :

$$\dot{x}_2 = -\frac{2gt(-2G + Q)}{4G + Q} \quad (28)$$

## 8 Obliczenie siły napięcia

Do policzenia siły napięcia potrzebne nam są te 2 równania :

$$\ddot{x}_1 = \frac{g(-2G + Q)}{4G + Q} \quad (29)$$

$$Q - 2S = \frac{Q\ddot{x}_1}{g} \quad (30)$$

Należy podstawić pierwsze równanie do drugiego :

$$Q - 2S = \frac{Q(-2G + Q)}{4G + Q} \quad (31)$$

Teraz jedynie wyliczyć z tego  $S$  :

$$S = \frac{3GQ}{4G + Q} \quad (32)$$