1 Wzory niezbędne do wykonania zadania:

Momenty bezwładnosci względem płaszczyzn

$$Ioxy = \int^{m} z^2\, dm \tag{1}$$

$$Ioxz = \int^{m} y^2\, dm \tag{2}$$

$$Ioyz = \int^{m} x^2\, dm \tag{3}$$

Momenty bezwładnosci względem osi:

$$Ix = \int^{m} \left(y^2 + z^2\right)\, dm \tag{4}$$

$$Iy = \int^{m} \left(x^2 + z^2\right)\, dm \tag{5}$$

$$Iz = \int^{m} \left(x^2 + y^2\right)\, dm \tag{6}$$

Momenty bezwładnosci względem środka układu:

$$Io = \int^{m} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dm \tag{7}$$

Reguła Pappus-Guldinus dla objętości obracanego obiektu:

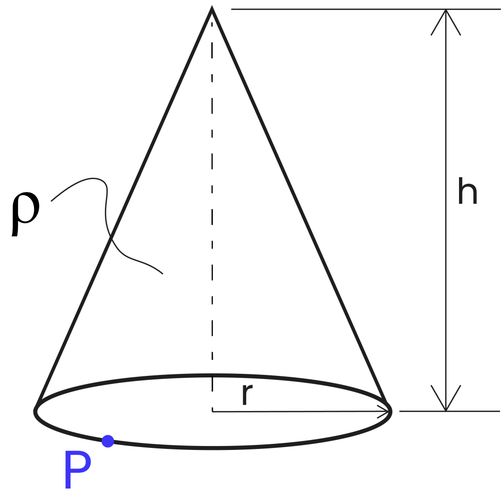
$$v = \int^{a} 2\pi r\, da \tag{8}$$

Teoria Steinera:

$$Ip = Ic + mr^2 \tag{9}$$

2 Analiza problemu

Znajdź wartość momentu bezwładności w punkcie P na krawędzi podstawy stożka.



3 Wstępne przekształcenia wzorów

Na wstępie możemy stwierdzić iż dla stożka gęstość wynosi:

$$\rho = \frac{m}{v} \tag{10}$$

$$v = \frac{h\pi r^2}{3} \tag{11}$$

$$\rho = \frac{3m}{h\pi r^2} \tag{12}$$

Prócz przekształceń wzoru na gęstość wykorzystamy wzór na moment bezwładności względem osi obrotu oraz względem płaszczyzny

$$Ioxy = \int^{m} z^2 \, dm \tag{13}$$

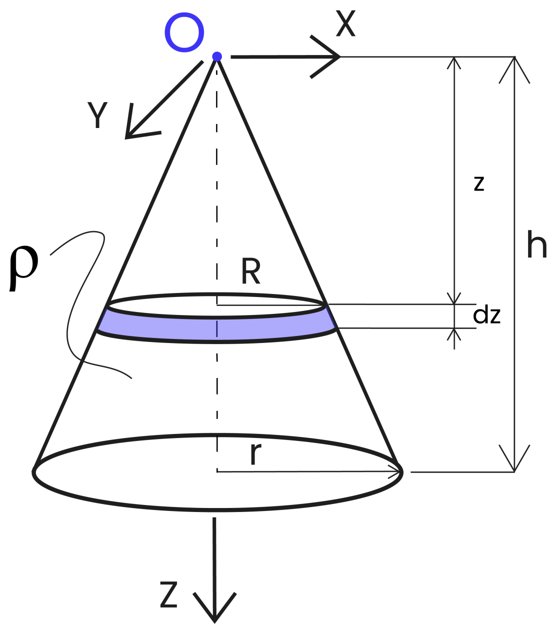
$$Ioxy = \rho \int^{v} z^2 \, dv \tag{14}$$

$$Iz = \int^{m} \left(x^2 + y^2\right) \, dm \tag{15}$$

$$Ioxy = \rho \int^{v} \left(x^2 + y^2\right) \, dv \tag{16}$$

4 Znalezienie momentu bezwładnosci bryły

By znaleźć moment w punkcie P posłużymy się momentem na czubku stożka, który następnie przesuniemy przy pomocy metody steinera. Pierwszym krokiem będzie policzenie momentu bezwładności dla płaszczyzny Oxy, by to zrobić wycinamy ze stożka cienki dysk o grubości dz, przy pomocy którego policzymy moment.



$$Ixy = \int^{m} z^2 \, dm \tag{17}$$

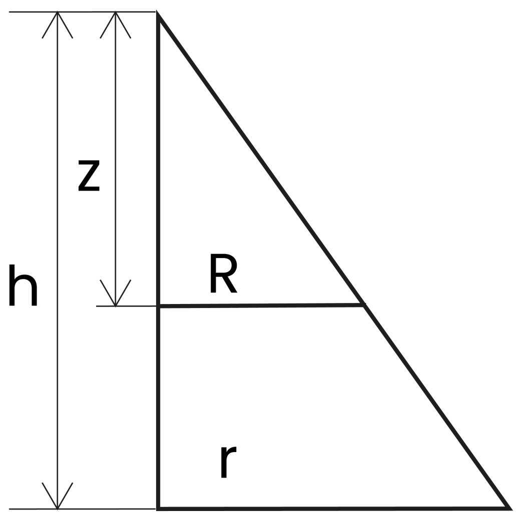
$$Ixy = \rho \int^{v} z^2 \, dv \tag{18}$$

By obliczyć całkę w tym przypadku możemy wykorzystać dv, przykształcając w następujący sposób:

$$dv = adz \tag{19}$$

$$a = R^2 \pi \tag{20}$$

By przekształcić równanie dla dysku o promieniu R możemy skorzystać z proporcji



$$\frac{r}{h} = \frac{R}{z} \tag{21}$$

$$R = \frac{rz}{h} \tag{22}$$

Podstawiając więc pod poprzednie równania:

$$a = \frac{\pi r^2 z^2}{h^2} \tag{23}$$

$$dv = \frac{dz\pi r^2 z^2}{h^2} \tag{24}$$

Wracając więc do całki momentu bezwładności otrzymujemy:

$$Ixy = \rho \int_0^h \frac{\pi r^2 z^4}{h^2}\, dz \tag{25}$$

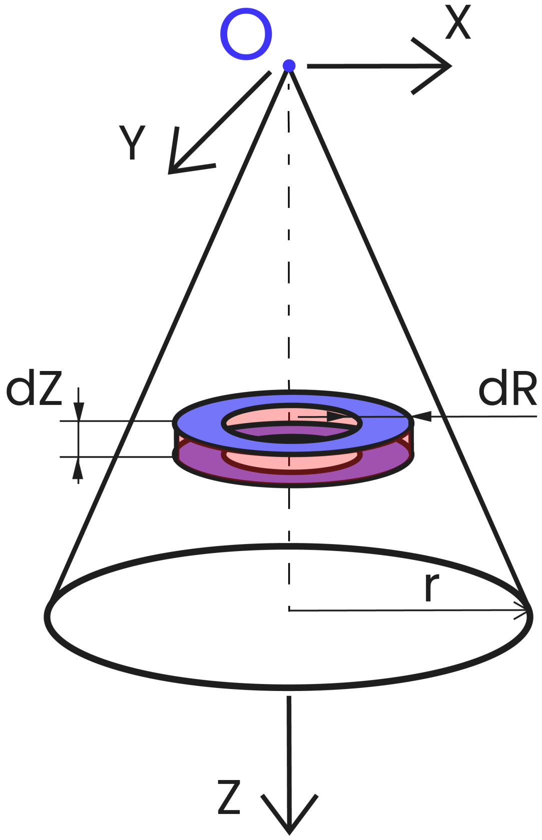
$$Ixy = \frac{h^3 \pi r^2 \rho}{5} \tag{26}$$

Znaleźliśmy więc moment bezwadności dla płaszczyzny XY następnie by odszukać moment w punkcie O, musimy wyliczyć moment dla osi z, a następnie je dodać.

$$Io = Ixy + Iz \tag{27}$$

$$Iz = \int^m \left(x^2 + y^2\right)\, dm \tag{28}$$

$$Iz = \rho \int^v \left(x^2 + y^2\right)\, dv \tag{29}$$



Zmieniając zmienne z koordynatów kartezjańskich na cylindryczne otrzymujemy:

$$Iz = \rho \int^{v} r^2 \, dv \tag{30}$$

Następnie korzystając z wspomnianej na wstępie reguły Pappus-Guldinus otrzymujemy całkę o postaci:

$$Iz = \rho \int_0^h \int_0^R 2R^3 \pi \, dR \, dh \tag{31}$$

Jak wiemy z poprzednio wyznaczonej proporcji:

$$R = \frac{rz}{h} \tag{32}$$

Całka wewnętrzna ma więc postać:

$$Calka_{wew} = \rho \int_0^{\frac{rz}{h}} 2R^3 \pi \, dR \tag{33}$$

Podstawiamy otrzymaną wartość pod całkę zewnętrzną i wykonujemy całkowanie by otrzymać finalny wynik

$$Iz = \rho \int_0^h \frac{\pi r^4 \rho z^4}{2h^4} \, dz \tag{34}$$

$$Iz = \frac{h\pi r^4 \rho^2}{10} \tag{35}$$

A więc finalnie dodając momenty, otrzymujemy następujący wzór na moment w punkcie O

$$Io = \frac{h^3 \pi r^2 \rho}{5} + \frac{h\pi r^4 \rho^2}{10} \tag{36}$$