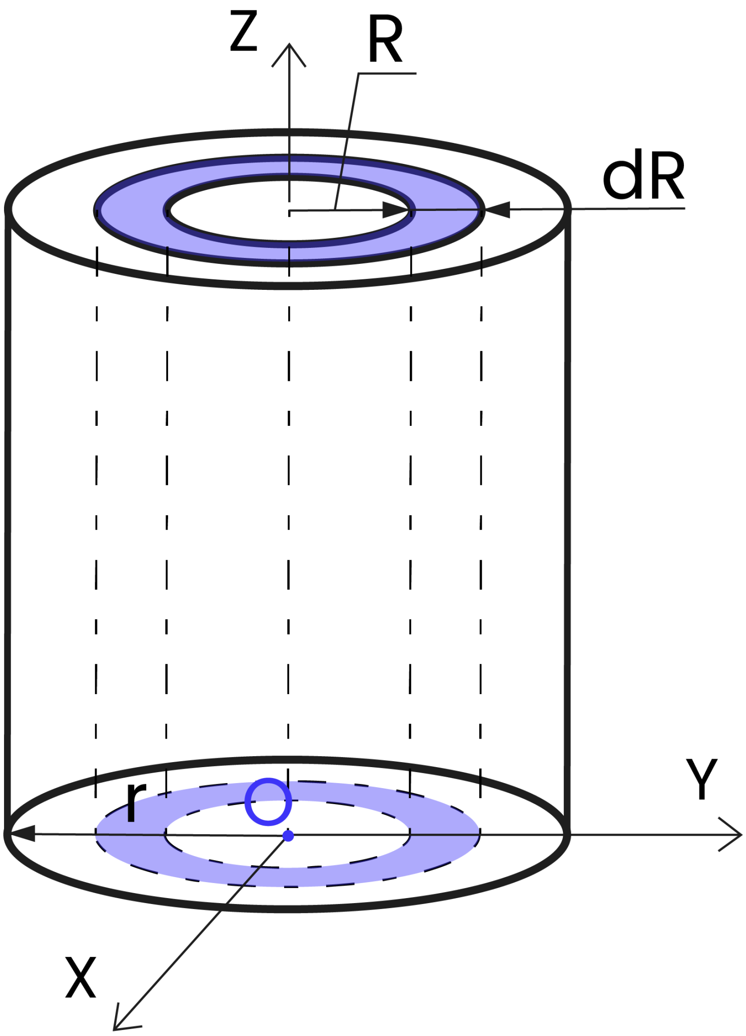
1 Analiza problemu

Znajdź wartość momentu bezwładności w punkcie O w miejscu styku osi symetrii



2 Wstępne przekształcenia wzoru na moment bezwładności

Na wstępie możemy stwierdzić iż dla walca:

$$\rho = \frac{m}{v} \tag{1}$$

$$v = \pi R^2 h \tag{2}$$

$$\rho = \frac{m}{\pi h r^2} \tag{3}$$

Następnie z wzoru na moment bezwładności wokół osi symetrii ciała:

$$Iz = \int^{m} \left(x^2 + y^2\right)\, dm \tag{4}$$

z poprzedniej zależności:

$$Iz = \rho \int^{v} \left(x^2 + y^2\right) \, dv \tag{5}$$

3 Znalezienie momentu bezwładnosci w osi Iz

Następnie wydzielamy cienką rurkę o promieniu R i grubości dR przy pomocy której policzymy moment bezwładności wokół osi z

$$Iz = \rho \int_{0}^{r} 2\pi R^3 h \, dR \tag{6}$$

$$Iz = \frac{\pi h r^4 \rho}{2} \tag{7}$$

Podstawiając wartość otrzymujemy

$$Iz = \frac{m r^2}{2} \tag{8}$$

4 Znalezienie momentu bezwładności płaszczyzny Ixy

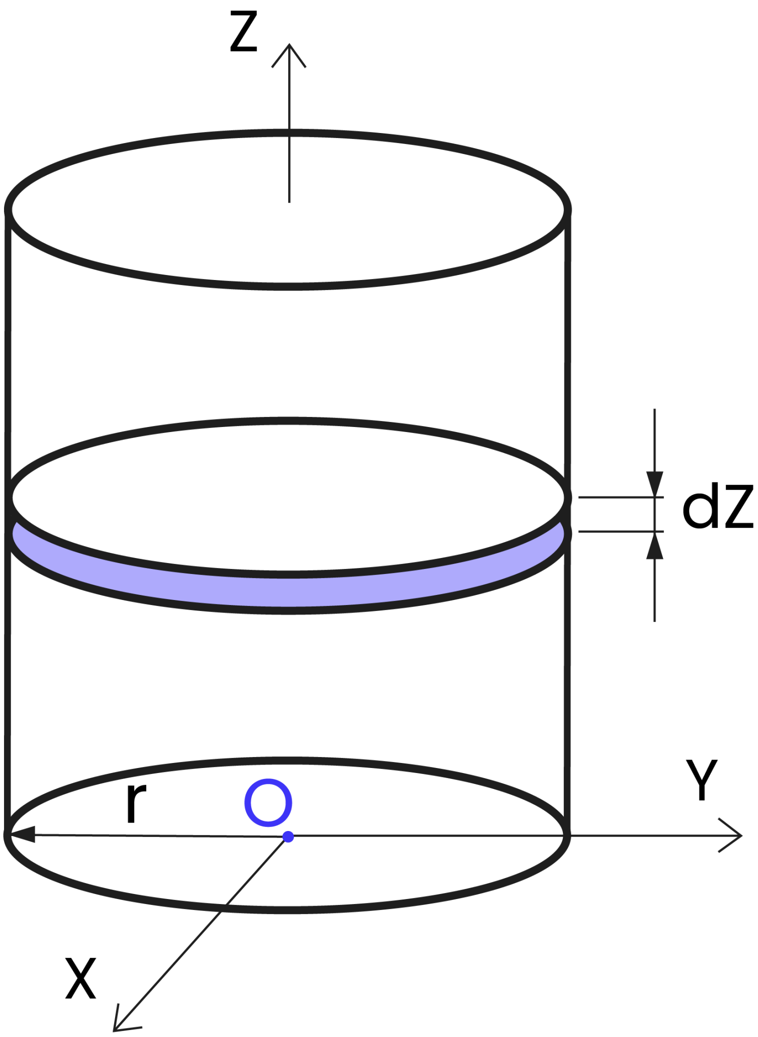
By znaleźć moment bezwładności punktu O możemy założyć iż jest on sumą momentu płaszczyzny Ixy oraz Iz

$$Io = Ixy + Iz \tag{9}$$

$$Ixy = \int^{m} z^2 \, dm \tag{10}$$

$$Ixy = \rho \int^{v} z^2 \, dv \tag{11}$$

By znaleźć więc moment dla płaszczyzny xy wydzielamy wąski dysk o grubości dz



$$dv = adz \tag{12}$$

$$a = \pi r^2 \tag{13}$$

Podstawiając więc wartość pod wcześniej zdefiniowanie równanie momentu bezwładności otrzymujemy

$$Ixy = \rho \int_0^h \pi r^2 z^2 \, dz \tag{14}$$

$$Ixy = \frac{\pi h^3 r^2 \rho}{3} \tag{15}$$

Podstawiając wartość otrzymujemy

$$Ixy = \frac{h^2 m}{3} \tag{16}$$

Finalnie więc sumując momenty Ixy i Iz otrzymujem

$$Io = \frac{mr^2}{2} + \frac{h^2 m}{3} \tag{17}$$

